

# 構造が固定化された制御器の $H_\infty$ 最適化

– ハードディスクドライブのヘッド制御器のチューニングへの応用 –

京都大学工学研究科 茨木 創一 松原 厚 垣野 義昭  
カリフォルニア大学バークレイ校機械工学科 富塚 誠義

## $H_\infty$ Optimization of Fixed Structure Controllers

– Application to the Tuning of a Hard Disk Drive Servo Controller –

Soichi IBARAKI, Department of Precision Engineering, Kyoto University  
Atsushi MATSUBARA, Department of Precision Engineering, Kyoto University  
Yoshiaki KAKINO, Department of Precision Engineering, Kyoto University  
Masayoshi TOMIZUKA, Mechanical Engineering Dept., Univ. of California at Berkeley

**Abstract:** This paper presents an algorithm to solve an  $H_\infty$  optimization problem of fixed-structure controllers. The proposed algorithm first transforms the original fixed-structure controller synthesis problem into an  $H_\infty$  synthesis problem of static output feedback control, which does not impose any structural constraints except for the one on the controller order. Then, a linearization-based local search algorithm is applied to solve this problem. Based on the proposed  $H_\infty$  optimization algorithm, this paper demonstrates an intuitive and efficient method to re-tune controller parameters, which were finely tuned by an expert engineer, and improve the control performance. As an application example, the proposed approach is applied to the tuning of a PID (Proportional plus Integral plus Derivative) controller for head positioning of hard disk drives. The effectiveness of the proposed re-tuning method is demonstrated by simulation and experimentation.

### 1 緒言

1990年代の中頃に提案されたLMI (Linear Matrix Inequality) 最適化に基づいた  $H_\infty$  最適化の手法<sup>1)</sup>は, 制御器がプラントと同じ次数を持つことが許され, また制御器の状態空間表現のすべての要素が自由にチューニング可能であるという前提条件が満たされれば, その  $H_\infty$  最適化問題は凸計画法によって解くことができることを示した. ところがこの前提条件のために,  $H_\infty$  制御器は常に次数が高くなり, 現実的な問題への適用は難しいことが多いという認識は, 広く一般のものである. 本論文では, 構造が固定化された制御器を, その制約内で  $H_\infty$  最適化する手法を提案する. また提案した手法の実際的な適用例を通して,  $H_\infty$  最適化が制御器の実際的な設計ツールになり得ることを示す.

制御理論の発達や, プロセッサの技術的な進歩にもかかわらず, 実際の製品に用いられている制御器は, PID 制御など単純な構造を持つものが非常に多い.  $H_\infty$  制御理論により得られた制御器を実装するためには, それまでに使っていた制御器の構造をすべて変更し, 高次の制御器を実装しななくてはならない. したがって, 構造が固定化された制御器のパラメータだけをチューニングする問題の実際的な重要性は明らかであるが, そのような問題は一般に凸計画法によって解くことができないため難解である. これまでに, PID 制御器の  $H_\infty$  最適化については幾つかの研究が報告されている. 例えば, 目的関数や制

御器の構造をある一定の制約を与えることで, 凸計画問題に帰着する手法<sup>2), 3)</sup>があるが, この手法はより一般的な問題に適用できず, 実用的とは言いがたい. 遺伝的アルゴリズムなどのヒューリスティック探索法による解法も報告されているが<sup>4)</sup>, やはりより一般的な構造の制御器への拡張を考えたときに, 収束速度に問題がある.

本論文で提案するアルゴリズムは, 従来の  $H_\infty$  制御の手法の自然な拡張であり, LMI 問題を解くことの繰り返しで解を与えるものである. 構造が固定化された制御器の  $H_\infty$  最適化問題は一般に  $NP$  困難であること, すなわちこの問題を多項式時間で解く大域的最適化手法は存在しないことは既に知られている. 提案するアルゴリズムも局所的最適化法であるが, 現実的な問題では非常に良好な探索性能を示すことが多い. また, 本論文で提案するアプローチの重要な長所のひとつは, 対象が PID 制御器に限られず, 実際的な構造の制御器のほとんどに適用可能であることである.

さらに本論文では, 提案したアルゴリズムをもとにして, もともと熟練エンジニアによって設定された制御器のパラメータを,  $H_\infty$  最適化の手法を利用して制御性能がさらに改善するようにチューニングを行う手法を紹介する. 適用例として, ハードディスクドライブのヘッド制御器のチューニングに応用し, シミュレーションと実験によってチューニングの効果を確認した.

## 2 構造が固定化された制御器の $H_\infty$ 最適化手法

### 2.1 定数フィードバックゲインの最適化問題への変換

本論文で扱う構造が固定化された制御器の  $H_\infty$  最適化問題は、一般に以下のように書くことができる。

$$\min_{C(s) \in \mathcal{C}} \|F_L(P(s), C(s))\|_\infty \quad (1)$$

$P(s)$  は与えられたプラントの伝達関数であり、制御器の伝達関数  $C(s)$  は  $\mathcal{C}$  で表される構造制約を満たさなくてはならないものとする。 $F_L(P(s), C(s))$  は Fig. 1(a) のように表される閉ループ系を考えたときの、 $d$  から  $z$  までの伝達関数を表す。

本論文では、はじめに構造が固定化された制御器の最適化問題を、LFT (linear fractional transformation) を用いて定数フィードバックゲインの最適化問題に等価変換する。基本的かつ実用的な例として、次の伝達関数で表される近似微分と近似積分要素を持つ PID 制御器を考える。

$$C(s) = k_p + k_i \frac{1}{s + \tau_i} + k_d \frac{s}{\tau_d s + 1} \quad (2)$$

ここで、 $\tau_i$  と  $\tau_d$  は正の微小定数であり、ここでは固定されているものとする。Fig. 1(a) で表される閉ループ系を考えたときに、 $\|F_L(P(s), C(s))\|_\infty$  が最小化されるように比例ゲイン  $k_p$ 、積分ゲイン  $k_i$ 、微分ゲイン  $k_d$  を設計する問題を考える。

$C(s)$  の状態空間表現は、例えば次のようになる。

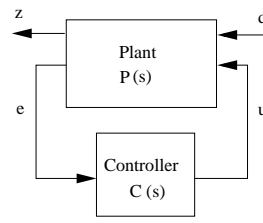
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\tau_i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\tau_d} \end{bmatrix} e(t) \\ u(t) &= \begin{bmatrix} k_i & k_d(-\frac{1}{\tau_d}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} + \left[ k_p + \frac{k_d}{\tau_d} \right] e(t) \end{aligned} \quad (3)$$

最初に、 $P(s)$  と  $C(s)$  の動特性の一部を組み合わせることによって、入力が  $[d(t), u(t)]^T$ 、出力が  $[z(t), w(t)]^T$  (ただし  $w(t) := [e(t), x_i(t), -\frac{1}{\tau_d}x_d(t) + \frac{1}{\tau_d}e(t)]^T$ ) となるように、合成システム  $P_K(s)$  を再構築する。 $P_K(s)$  の構築は単純な代数的変換にすぎない。この  $P_K(s)$  の出力を用いれば、制御入力は  $u(t) = [k_p \ k_i \ k_d] w(t)$  と書くことができ(式 (3) を参照のこと)、したがって全体の閉ループ系は Fig. 1(b) のように表すことができる。すなわち、 $F_L(P(s), C(s)) = F_L(P_K(s), K)$  である。ここで、 $K := [k_p \ k_i \ k_d]$  はチューニング変数をすべて含む、 $1 \times 3$  の定数行列であるが、これらのチューニング変数が、閉ループ系からいわば抽出された形となる。

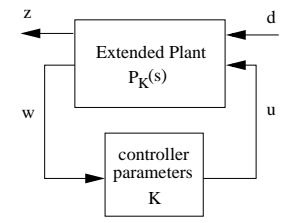
この変換によって、もともとの構造が固定化された制御器の最適化問題を、定数フィードバックゲインの最適化問題と見なすことができる。すなわち制御器の構造に対する制約が、次数に対する制約のみとなったため、次節にて概説するアルゴリズムが適用できる。

なお言うまでもなく、この変換は式 (2) で与えられる PID 制御器に限定されない。Nett ら<sup>6)</sup> も強調しているように、実際の制御器の構造のほとんどにこの変換は適用可能である。例えば次式の伝達関数で表される高次の制御器でも、Fig. 1(b) の形に変換可能である。

$$G_c(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (4)$$



(a) Original configuration



(b) Extraction of controller parameters

Fig. 1 Closed-loop system configuration of the  $H_\infty$  optimization problem (1)

ただし、 $a_i, b_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) は自由にチューニング可能なパラメータである。定数フィードバックゲインの最適化問題に変換可能な制御器の構造のクラスについての詳細は、文献 (7)(8) を参照のこと。

### 2.2 定数フィードバックゲインの $H_\infty$ 最適化

前節で示した変換により、構造が固定化された制御器の  $H_\infty$  最適化問題が以下の形に等価変換されたものとする。

$$\min_{K \in \mathbb{R}^{m_2 \times p_2}} \|F_L(P_K(s), K)\|_\infty \quad (5)$$

ただし、 $P_K$  の状態空間表現は以下のように与えられているものとする。

$$\left( A, [B_1 \ B_2], \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \right) \quad (6)$$

ただし、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_{11} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_1}$  and  $D_{22} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_2}$ 。Gahinet<sup>1)</sup> らによって提唱された、LMI 最適化に基づいた  $H_\infty$  最適化の手法は、以下の定理に基づいている。

定理 1  $\|F_L(P_K(s), K(s))\|_\infty < \gamma$  を満たす  $k$  次の制御器  $K(s)$  が存在するための必要十分条件は、以下を満たす  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  及び  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  が存在することである。

$$\mathcal{N}_1^T \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \mathcal{N}_1 < 0 \quad (7)$$

$$\mathcal{N}_2^T \begin{bmatrix} A^T Y + YA & YB_1 & C_1^T \\ B_1^T Y & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \mathcal{N}_2 < 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9)$$

$$\text{rank}(XY - I) \leq k \quad (10)$$

ただし、 $\mathcal{N}_1 = \text{diag}\{N_{12}, I\}$ ,  $\mathcal{N}_2 = \text{diag}\{N_{21}, I\}$ ,  $N_{12}$  と  $N_{21}$  はそれぞれ  $\begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix}$  and  $\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$  の核を表す。

制御器の次数がプラントの次数以上の場合 ( $k \geq n$ )、条件 (10) は無条件に満たされるため、full-order の制御器の  $H_\infty$  最適化問題は LMI 問題となる。よく知られているように、LMI 問題は凸計画問題であり、内点法を用いて簡単に効率よく大域的最

適解を求めることができる<sup>8)</sup>。しかし、問題 (5) では  $k = 0$  の条件の下で解かねばならず、階数条件 (10) は非凸条件となり、従来の手法は適用できない。

低次元  $H_\infty$  制御問題についてはこれまでに多くの研究がなされており、本論文では El Ghaoui ら<sup>5)</sup> が提唱した手法を採用する。これは、条件 (9) のもとで、 $X, Y$  が条件 (10) を満たす必要十分条件は  $Tr(XY) = n$  となることであり、また条件 (9) は常に  $Tr(XY) \geq n$  を保証するという事実を利用し、条件 (7)~(9) のもとで  $Tr(XY)$  を最小化することによって、階数条件 (10) を満たす  $X, Y$  を探索するものである。ただし、 $Tr(X)$  は正方行列  $X$  のトレース (対角要素の和) を意味する。ここでは、さらに目的関数  $Tr(XY)$  を線形化することによって、凸計画法の繰り返しによって解を探索する。アルゴリズムの詳細は文献 (6) を参照されたい。

このアルゴリズムは局所的最適化手法であるが、実際的な問題では非常に良好な探索性能を示すことは、El Ghaoui らも多くの数値実験を通じて示している<sup>5)</sup>。

### 3 適用例

#### 3.1 ハードディスクドライブのヘッド制御

ハードディスク (HDD) 装置のヘッドシステムには、記憶容量の増加に伴い、ますます高い制御性能が要求されるようになってきている<sup>9)</sup>。HDD の使用時には、データの読み書きのためにヘッドが異なるトラックの間を極めて高速に移動しなくてはならないため、高い帯域が求められる。また、主軸モータの振動、機械振動やショック、トラック誤差、測定雑音、などの外乱に対する感度も低くすることも重要である。これらの異なる 2 つの要求にこたえるため、ヘッドの位置決め制御は通常サークル制御モードとフォロイング制御モードの 2 つのモードを持つ。本論文では、提案した  $H_\infty$  最適化の手法の適用例として、フォロイング制御モードのフィードバック制御器のチューニングを考える。

#### 3.2 ヘッドの動特性のモデル化

HDD の構造の模式図を Fig. 2 に示す。ヘッド位置決めシステムは、データの読み書き用の磁気ヘッド、アーム、ボイスコイルモータ (VCM) からなる。

はじめに、VCM アクチュエータの動特性を次のように 5 次の線形伝達関数としてモデル化した。

$$G(s) = \frac{K_{vcm} \cdot \omega_1^2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2} \cdot \frac{\omega_2^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2} \cdot \frac{-0.5D_1s + 1}{0.5D_1s + 1}$$

最初の項は、高周波数域では二重積分器、低周波数域ではピボット摩擦によりゲインが平らになる基本的な特性を表す。第 2 項は 3.6kHz 付近に現れる機械構造の共振特性をモデル化したものであり、最後の項は、制御器の時間遅れをパデー近似を用いて表したものである。モデルのパラメータは、測定した実際の実験装置の周波数特性をもとにして同定した。

#### 3.3 $H_\infty$ 最適化を用いた制御器のチューニング

ヘッド制御器には式 (2) で与えられる PID 制御器を用いるものとする。制御器の設計基準は以下の通りである。1) 交差周波

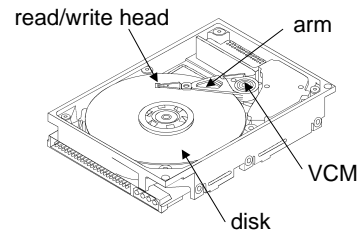


Fig. 2 Schematic view of a hard disk drive

数は十分な帯域を確保するため、 $f_c = 600$  Hz 以上とする。2) ゲイン・位相余裕はそれぞれ 5 dB, 40 度以上とする。3) 以上の制約を満たした上で、交差周波数付近での共振振動を抑えるため、感度関数のピークゲインをできるだけ小さくする。

なお、実験に用いた HDD 装置は市販品であり、従来は 2 次の制御器  $C_1(s)$ 、あるいは 3 次の制御器  $C_2(s)$  のどちらかが使われている。これらの制御器の係数は、熟練エンジニアが上の設計要求を満たすようにチューニングを行ってある。本節の目的は、PID 制御器 (2) が熟練エンジニアした従来の制御器よりも優れた (上の設計基準の意味で) 制御性能を示すように、そのゲイン ( $k_p, k_i, k_d$ ) を  $H_\infty$  最適化の手法を応用してチューニングすることである。

はじめに、チューニングの評価関数は以下のように与えた。

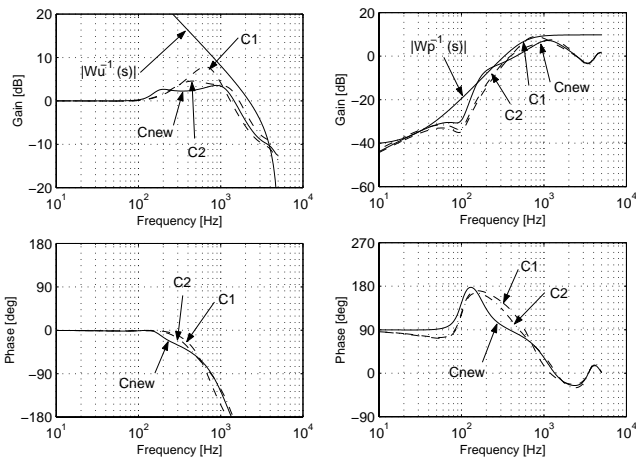
$$\text{Find } K = (k_p, k_i, k_d) \quad \text{such that} \quad \left\| \begin{array}{c} T(s)W_u(s) \\ S(s)W_p(s) \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (11)$$

ここで、 $T(s)$  は閉ループ系の相補感度関数、 $S(s)$  は感度関数を表す。式 (11) のなかの  $W_u(s)$  と  $W_p(s)$  は、それぞれ  $|T(j\omega)|$  と  $|S(j\omega)|$  の望ましい形を指定する重み関数である。本問題では、従来の制御器よりも優れた性能を達成する、すなわち安定性を過度に犠牲にすることなく特に感度関数のピーク付近のゲインを下げるという設計目的があるため、 $C_2(s)$  (あるいは  $C_1(s)$ ) を用いた場合の実際の閉ループの相補感度関数、感度関数の周波数応答をもとにして  $W_u(s)$  と  $W_p(s)$  をデザインすればよい。このフィルタの設計手法は単純であるが、 $H_\infty$  最適化を実際の制御器設計に適用するために、非常に有用な例のひとつである。設計された重み関数  $W_u(s)$  と  $W_p(s)$  の周波数応答は、Fig. 3(a)(b) に示す。

#### 3.4 シミュレーションと実験結果

本論文で提案したアルゴリズムによって問題 (11) を解いた。LMI 問題を解く計算は、LMI Control Toolbox<sup>10)</sup> を用いて MATLAB 上で行った。なお、問題 (11) のなかのプラントのモデルの次数は 10 次である (プラント 5 次、制御器 2 次、フィルタ計 3 次)。

従来の制御器  $C_1(s)$  と  $C_2(s)$ 、及びチューニングされた PID 制御器 ( $C_{new}(s)$  と書く) のそれぞれを用いて、(a) 相補感度関数  $T(s)$ 、(b) 感度関数  $S(s)$  の周波数応答を、シミュレーションによって求めた結果を Fig. 3 に示す。各制御器の制御性能は Table 1 にまとめられている。 $C_{new}(s)$  の次数は  $C_2(s)$  よりも低いにも関わらず、感度関数のピークゲインが低くなっていることが分かる。



(a) Complementary sensitivity transfer function,  $T(s)$  (b) Sensitivity transfer function,  $S(s)$

Fig. 3 Comparison of closed-loop frequency responses under two conventional controllers ( $C_1$  and  $C_2$ ) and the designed PID controller ( $C_{new}$ ) (simulation results)

Table 1 Performance comparison of two conventional controllers ( $C_1(s)$  and  $C_2(s)$ ) and the designed PID controller ( $C_{new}(s)$ ) (simulation results)

	$C_1(s)$	$C_2(s)$	$C_{new}(s)$
Order	2	3	2
Cross-over frequency Hz	636	622	625
Gain margin dB	5.32	5.02	5.53
Phase margin deg	23.36	35.82	41.63
Sensitivity function peak dB	9.04	7.50	7.20

次に、チューニングした PID 制御器の性能を実験によって確認した。Table 2 に実験に用いた HDD 装置の主な諸元を示す。各制御器を実装し、ディスクを 1,000 回転し位置誤差信号 (PES) を記録する。Table 3 は、PES の RPE (repeatable position error) 成分と NRPE (non-repeatable position error) 成分の標準偏差を各制御器について比較したものである。チューニングにより、NRPE 成分の標準偏差で、 $C_2(s)$  と比較して約 14% の改善が見られた。 $C_2(s)$  の次数は PID 制御器よりも 1 次高く、また  $C_2(s)$  も熟練エンジニアがチューニングした結果であることを考えると、この結果は満足がいくものであると言える。

## 4 結論

本論文では、構造が固定された制御器の  $H_\infty$  最適化アルゴリズムを提案した。提案したアルゴリズムは、次の 2 つのステップを基本とする。1) チューニングパラメータを「抽出」し、定数フィードバックゲインの最適化問題に帰着させる。2) 線形化手法を使い、凸計画法の繰り返しにより定数フィードバックゲインの  $H_\infty$  最適化問題を解く。適用例として、提案した  $H_\infty$  最適化手法を用いて HDD のヘッド制御器のチューニングを行った。 $H_\infty$  最適化の手法は、閉ループ系の周波数応答を陽にデザインするのに有用なツールのひとつである。提案した手法が、

Table 2 Experimental setup specifications

Capacity	18.4 GB
Disks	5/3.5"
Tracks per inch	13,000
Spindle speed	7,208 rpm
Sampling period	99.1 $\mu$ m
Average seek time	6.5/7.5 ms (Read/Write)

Table 3 The standard deviation of the measured PES under the conventional controller,  $C_2(s)$ , and the designed PID controller,  $C_{new}(s)$

	$C_2(s)$	$C_{new}(s)$	improvement
NRPE	0.036 $\mu$ m	0.031 $\mu$ m	13.9%
RPE	0.0163 $\mu$ m	0.0165 $\mu$ m	-1.2%

制御器設計の現場でしばしば用いられている経験的なチューニング手法の知識・経験を必要とせず、制御器の性能を向上させるのに有効であることを、シミュレーションと実験によって確認した。

## 参考文献

- [1] P. Gahinet and P. Apkarian: A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control; *International Journal of Robust Nonlinear Control*, Vol. 4, 421/448 (1994)
- [2] E. Grassi and K. Tsakalis: PID controller tuning by frequency loop-shaping; *Proc. of the 35th Conf. on Decision and Control*, Kobe, Japan, 4776/4781 (1996)
- [3] S. A. Malan, M. Milanese and M. Taragna: Robust tuning for PID controllers with multiple performance specifications; *Proc. of the 33rd Conf. on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, 2684/2689 (1994)
- [4] T. Kawabe and T. Tagami: A real coded genetic algorithm for matrix inequality design approach of robust PID controller with two degree of freedom; *Proc. of the 12th IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Istanbul, Turkey, 119/124 (1997)
- [5] L. El Ghaoui, F. Oustry and M. AitRami: A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problem; *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 42, No. 8, 1171/1176 (1997)
- [6] C. N. Nett, D. S. Bernstein, and W. M. Haddad: Minimal complexity control law synthesis, part 1: Problem formulation and reduction to optimal static output feedback; *Proc. of the American Control Conf.*, Pittsburgh, PS, 2056/2064 (1989)
- [7] S. Ibaraki: Nonconvex optimization problems in  $H_\infty$  optimization and their applications; Ph.D. Thesis, University of California at Berkeley (2001)
- [8] L. Vandenberghe and S. Boyd: Semidefinite programming; *SIAM Review*, vol. 38, No. 1, 49/95 (1996)
- [9] M. Steinbuch and M. L. Norg: Advanced motion control: An industrial perspective; *European Journal of Control*, Vol. 4, 278/293 (1998)
- [10] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali: The LMI Control Toolbox; *Proc. of the 33rd Conf. on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, 2038/2041 (1994)